

Die Mathematik des stellaren Massenverlusts und dessen Auswirkungen auf Planetenbahnen

Originaltext: <https://cseligman.com/text/stars/masslosseffects.htm>

Orbitalenergie

Die Energie eines Objekts, das sich in einem Gravitationsfeld – etwa dem der Sonne – bewegt, lässt sich in zwei Bestandteile unterteilen: kinetische Energie (Bewegungsenergie) und potenzielle Energie (Lageenergie).

Die kinetische Energie hängt von der Masse und der Geschwindigkeit des Objekts ab, gemäß der Formel

$$E_{\text{kin}} = \frac{m v^2}{2}$$

wobei m die Masse des Objekts und v seine Geschwindigkeit (bzw. sein Bewegungstempo) ist (die Geschwindigkeit umfasst zwar auch die Bewegungsrichtung, doch spielt diese in diesem Zusammenhang keine Rolle). Dieser Wert ist stets positiv; da sich Planeten auf kleineren Umlaufbahnen schneller bewegen, gilt: Je kleiner die Umlaufbahn, desto größer ist die positive kinetische Energie pro Masseneinheit.

Die potenzielle Gravitationsenergie wird als negativer Wert definiert, der der kinetischen Energie entspricht, die ein Objekt gewinnen würde, wenn es aus unendlicher Entfernung an seine aktuelle Position fiele. In sehr großer Entfernung von der Sonne hätte das Objekt eine potenzielle Energie von null (da es durch den Fall noch keine Geschwindigkeit aufgenommen hätte). Objekte in Sonnennähe weisen große (wenn auch negative) potenzielle Energien auf, was der Geschwindigkeit entspricht, die sie bei einem langen Fall gewinnen würden. Da sich die Gravitationskraft der Sonne mit der Entfernung ändert, ist für die Herleitung der Formel der potenziellen Energie die Anwendung der Infinitesimalrechnung erforderlich; das Ergebnis stellt jedoch lediglich eine einfache Abwandlung des Gravitationsgesetzes dar:

$$E_{\text{pot}} = -\frac{G m M}{r}$$

wobei m und M die Massen des Planeten beziehungsweise der Sonne sind, r der Abstand des Planeten von der Sonne ist und G die Gravitationskonstante darstellt. Man beachte: Im Gegensatz zur kinetischen Energie, die bei kleineren Umlaufbahnen einen größeren positiven Wert aufweist, besitzt die potenzielle Energie bei kleineren Umlaufbahnen einen größeren negativen Wert.

Die Gesamtenergie eines Objekts ist die Summe aus seiner kinetischen und seiner potenziellen Energie. Da bei einem fallenden Objekt die kinetische Energie in genau demselben Maße zunimmt, wie die potenzielle Energie abnimmt, ist die Gesamtenergie einer Planetenumlaufbahn eine Konstante:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m v^2}{2} - \frac{G m M}{r} = \text{konstant}$$

und die Gesamtenergie pro Einheit der Planetenmasse m stellt sich wie folgt dar:

$$\frac{E_{\text{tot}}}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{G M}{r}$$

Anwendung auf Kreisbahnen

Keplers drittes Gesetz der Planetenbewegung, das die Größe einer Umlaufbahn mit deren Umlaufzeit in Beziehung setzt, lässt sich (nach Newtons Modifikation des Gesetzes) wie folgt formulieren:

$$P^2 = \frac{4 \pi^2 a^3}{G M}$$

Hierbei ist P die Umlaufzeit eines Planeten, a die große Halbachse seiner Umlaufbahn – also sein „durchschnittlicher“ Abstand von der Sonne – und M die Gesamtmasse aus Planet und Sonne (wobei in dieser Betrachtung lediglich die Masse der Sonne angesetzt wird, da erstens die Massen der Planeten im Vergleich zur Sonne vernachlässigbar sind und zweitens eine Berücksichtigung der Planetenmassen auch deren Einbeziehung in die Berechnung der potenziellen Energie erfordern würde; die zusätzlichen Massen heben sich dabei gegenseitig auf, sodass das Ergebnis dasselbe ist, als würde man sie von vornherein ignorieren).

Für eine Kreisbahn verlangt das zweite Keplersche Gesetz – das die Geschwindigkeit eines Planeten mit seinem Abstand von der Sonne in Beziehung setzt –, dass die Geschwindigkeit ebenso konstant ist wie der Abstand von der Sonne. Diese konstante Geschwindigkeit ergibt sich einfach aus dem Umfang der Umlaufbahn, dividiert durch die Umlaufzeit:

$$v = \frac{2 \pi a}{P}$$

$$\text{Quadrieren ergibt } v^2 = \frac{4 \pi^2 a^2}{P^2}$$

und indem man das dritte Keplersche Gesetz anstelle des Quadrats der Periode verwendet:

$$v^2 = \frac{4 \pi^2 a^2}{\left(\frac{4 \pi^2 a^3}{G M}\right)}$$

Durch Division entfällt der Großteil der Terme, sodass (für Kreisbahnen) Folgendes verbleibt:

$$v^2 = \frac{G M}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{E_{\text{kin}}}{m} = \frac{v^2}{2} = \frac{G M}{2 a}$$

Da r und a bei einer Kreisbahn gleich sind, entspricht dies genau der Hälfte des (negativen) Wertes der potenziellen Energie pro Masseneinheit. Folglich ergibt die Addition von kinetischer und potenzieller Energie eine Gesamtenergie, die der Hälfte der potenziellen Energie entspricht und gleich der kinetischen Energie, aber negativ ist. Anders ausgedrückt: Bei einer Kreisbahn gilt:

$$E_{\text{tot}} = \frac{E_{\text{pot}}}{2} = -E_{\text{kin}} = -\frac{G M}{2 a} = \text{eine Konstante für eine gegebene Umlaufbahn.}$$

Ist die Umlaufbahn sehr groß – a ist also sehr groß –, so ist die Energie eine sehr kleine negative Zahl. Bei kleineren Umlaufbahnen ist die Gesamtenergie eine „größere“ negative Zahl (d. h. ihr Betrag ist größer). In kleineren Umlaufbahnen sind sowohl die Geschwindigkeit als auch die kinetische Energie höher; da jedoch auch die potenzielle Energie größer ist (tatsächlich sogar doppelt so groß), ergibt sich für kleinere Umlaufbahnen eine „größere“ negative Zahl als für größere Umlaufbahnen. (Dies hat unter anderem wichtige Konsequenzen für elektromagnetische und nukleare Wechselwirkungen, was jedoch den Rahmen dieser Erörterung sprengen würde.)

Anwendung auf elliptische Umlaufbahnen

Bei elliptischen Umlaufbahnen ist die Geschwindigkeit nicht konstant; die Vereinfachungen aus dem vorangegangenen Abschnitt lassen sich daher nicht direkt anwenden. Während sich ein Planet von der Sonne entfernt oder sich ihr nähert, schwanken die kinetische und die potenzielle Energie kontinuierlich. Da jedoch die eine Energieform genau in dem Maße zunimmt, wie die andere abnimmt, bleibt ihre Summe – die Gesamtenergie der Umlaufbahn – stets konstant. Tatsächlich besitzen alle Umlaufbahnen einer bestimmten Größe (bzw. mit einer bestimmten großen Halbachse) dieselbe Gesamtenergie pro Masseneinheit, unabhängig von ihrer Exzentrizität. Mit anderen Worten: Eine Kreisbahn und eine elliptische Umlaufbahn weisen – sofern sie dieselbe große Halbachse a haben – exakt die gleiche Gesamtenergie auf. Während bei einer Kreisbahn die kinetische und die potenzielle Energie konstant bleiben, ändern sie sich bei einer elliptischen Umlaufbahn gegenseitig; die Gesamtenergie bleibt jedoch identisch mit der einer Kreisbahn derselben mittleren Größe.

Herleitung der Auswirkungen eines Massenverlusts der Sonne

Vor diesem Hintergrund können wir nun untersuchen, wie sich der Massenverlust, den die Sonne im hohen Alter zwangsläufig erleiden wird, auf die Größe der Planetenbahnen auswirkt. Wir gehen dabei davon aus, dass die Umlaufbahnen annähernd kreisförmig sind, sodass wir die für diesen Fall geltenden Vereinfachungen nutzen können. Zudem nehmen wir an, dass eine etwaige Reibung – verursacht durch Gase, die von der Sonne ausgestoßen werden und die Bahnen der Planeten durchqueren – nur einen vernachlässigbaren Einfluss auf deren Bewegung hat. Unter diesen Voraussetzungen ist lediglich zu berücksichtigen, dass die Sonne durch ihren Massenverlust eine geringere Gravitationskraft ausübt und somit nicht mehr in der Lage ist, die Planeten auf denjenigen Bahnen zu halten, die für ihre jeweilige aktuelle Geschwindigkeit erforderlich wären. Infolgedessen würden sich die Planeten allmählich von der Sonne entfernen, höhere Umlaufbahnen einnehmen und dabei ihre Geschwindigkeit auf Werte verringern, die durch die nun schwächere Gravitationskraft der Sonne auf diesen Bahnen aufrechterhalten werden könnten.

Um zu verstehen, wie dies funktioniert, gehen wir von den Formeln für die gegenwärtige („ursprüngliche“, Index „orig“) Masse der Sonne aus:

$$E_{\text{tot}} = \frac{E_{\text{pot}}}{2} = -E_{\text{kin}} = -\frac{G M_{\text{orig}}}{2 a_{\text{orig}}}$$

Wenn die Sonne an Masse verliert, nimmt die potenzielle Energie der Umlaufbahn eines Planeten ab (da sie jedoch negativ ist, entspricht dies tatsächlich einem höheren Energiewert). Die kinetische Energie bleibt (zunächst) unverändert, sodass die Gesamtenergie um denselben Betrag zunimmt, um den sich die potenzielle Energie ändert. Dies führt dazu, dass die Umlaufbahn größer wird, wodurch der (negative) Wert der potenziellen Energie weiter sinkt und – da sich Objekte auf größeren Umlaufbahnen langsamer bewegen – gleichzeitig auch die kinetische Energie abnimmt. Dieser Prozess setzt sich fort, bis ein stabiler Zustand erreicht ist, in dem die (neue) kinetische Energie betragsmäßig der (neuen) Gesamtenergie entspricht und die Hälfte der (neuen) potenziellen Energie ausmacht.

Zahlenmäßig betrachtet entspricht die ursprüngliche kinetische Energie

$$E_{\text{kin,orig}} = \frac{G M_{\text{orig}}}{2 a_{\text{orig}}}$$

zuzüglich der neuen potenziellen Energie

$$E_{\text{pot,neu}} = -\frac{G M_{\text{neu}}}{a_{\text{orig}}}$$

einer neuen Gesamtenergie von

$$E_{\text{tot,neu}} = E_{\text{kin,orig}} + E_{\text{pot,neu}} = \frac{G M_{\text{orig}}}{2 a_{\text{orig}}} - \frac{G M_{\text{neu}}}{a_{\text{orig}}}$$

und in einer neuen, nahezu kreisförmigen Umlaufbahn entspricht diese Gesamtenergie der Hälfte der neuen potenziellen Energie:

$$E_{\text{tot,neu}} = \frac{E_{\text{pot,neu}}}{2} = -\frac{G M_{\text{neu}}}{2 a_{\text{neu}}}$$

oder, durch Zusammenfassen der Terme

$$\frac{G M_{\text{orig}}}{2 a_{\text{orig}}} - \frac{G M_{\text{neu}}}{a_{\text{orig}}} = -\frac{G M_{\text{neu}}}{2 a_{\text{neu}}}$$

Multipliziert man jeden Term mit $\frac{2 a_{\text{neu}}}{G M_{\text{orig}}}$, erhält man:

$$\frac{a_{\text{neu}}}{a_{\text{orig}}} - \frac{2 M_{\text{neu}} a_{\text{neu}}}{M_{\text{orig}} a_{\text{orig}}} = -\frac{M_{\text{neu}}}{M_{\text{orig}}}$$

Durch Umstellen der Terme erhält man

$$\left(\frac{a_{\text{neu}}}{a_{\text{orig}}}\right) \left(1 - \frac{2 M_{\text{neu}}}{M_{\text{orig}}}\right) = -\frac{M_{\text{neu}}}{M_{\text{orig}}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{a_{\text{neu}}}{a_{\text{orig}}} = \frac{-\frac{M_{\text{neu}}}{M_{\text{orig}}}}{\left(1 - \frac{2 M_{\text{neu}}}{M_{\text{orig}}}\right)}$$

und schließlich durch Umkehren der Vorzeichen auf der rechten Seite

$$\frac{a_{\text{neu}}}{a_{\text{orig}}} = \frac{\frac{M_{\text{neu}}}{M_{\text{orig}}}}{\left(\frac{2 M_{\text{neu}}}{M_{\text{orig}}} - 1\right)} \quad \square$$